30/4/2020

11^{o} online μάθημα

Άσκηση 4.5:

(1) Γνωρίζουμε ότι ένας εκτιμητής της μέσης τιμής είναι η δειγματική μέση τιμή. Άρα $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{9.35 + \ldots + 10.55}{12}$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{121.87}{12} = 10.156$$

Είναι γνωστό ότι $Var\,\bar{x} = 6^2/n \Rightarrow Var\,\bar{x} = 6^2/12$

Όμως 6^2 άγνωστη διακύμανση. Για να βρούμε το τυπικό σφάλμα του εκτιμητή εκτιμούμε το 6^2 από την S^2: Έτσι

$$\widehat{Var}\,\bar{x} = \frac{S^2}{12} = \frac{1.619}{12}$$

και επομένως το τυπικό σφάλμα είναι

$$\sqrt{\frac{1.619}{12}} = 0.367 = S/\sqrt{n}$$

(ii) Απαραίτητη υπόθεση: τ.δ. από $N(\mu, \sigma^2)$

Δ.Ε. για μ: $\bar{X} \pm t_{n-1, a/2}\, S/\sqrt{n}$

Εδώ $n = 12$ άρα $t_{n-1, a/2} = t_{11, 0.025} = 2.201$

Δ.Ε. $(9.348, 10.964)$

(iii) Απαραίτητη υπόθεση τ.δ. $N(\mu, \sigma^2)$

Τότε Δ.Ε για σ^2:

$$L = \frac{(n-1)S^2}{X^2_{a/2, n-1}}, \quad U = \frac{(n-1)S^2}{X^2_{1-a/2, n-1}}$$

Εδώ είναι $a = 0.05$ $n = 12$ $S = 1.619$

Προσοχή καθώς μας ζητάει για το S

$$L' = \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{X^2_{a/2, n-1}}} = 0.9015$$

$$U' = \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{X^2_{1-a/2, n-1}}} = 2.1606$$

Άσκηση 4.6:

Γνωρίζουμε από την θεωρία ότι το $100(1-a)\%$ Δ.Ε. για την μ κανονικού πληθυσμού με σ^2 άγνωστη είναι:

$$L = \bar{X} - t_{n-1, a/2}\, S/\sqrt{n}$$

$$U = \bar{X} + t_{n-1, a/2}\, S/\sqrt{n}$$

και ισχύει

$$P(L < \mu < U) = 1 - a$$

Από αυτήν προκύπτει εύκολα ότι

$$P(3L + 7 < 3\mu + 7 < 3U + 7) = 1 - a$$

και επομένως το Δ.Ε. $100(1-a)\%$ για την $\theta = 3\mu + 7$ είναι το $(3L+7, 3U+7)$ με τα L, U όπως προσδιορίστηκαν πρωτύτερα

Εδώ είναι $\bar{X} = 11$, $S^2 = 9 \Rightarrow S = 3$

$t_{2, 0.025} = 4.303$ και προκύπτει το Δ.Ε. $(17.640, 62.359)$

Άσκηση 4.7:

$a = P(\text{σφάλμα τύπου I}) = P(\text{απορρίπτω } H_0 \mid H_0 \text{ αληθής}) =$

$= P(\bar{x} \geq 21 \mid x_1, \dots, x_9 \text{ τ.δ. } N(\mu = 20, 1)) =$

$= P(\bar{x} \geq 21 \mid \bar{x} \sim N(\mu = 20, \sigma^2/n = 1/9)) =$

$$= P\left(\frac{\bar{x} - 20}{\sqrt{1/9}} \geq \frac{21 - 20}{\sqrt{1/9}} \;\middle|\; \frac{\bar{x} - 20}{\sqrt{1/9}} \sim N(0, 1) \right)$$

Άρα

$a = P(Z \geq 3 \mid Z \sim N(0,1)) \Rightarrow a = 1 - P(Z \leq 3 \mid Z \sim N(0,1))$

$\xrightarrow[N(0,1)]{\text{ΠΙΝΑΚΕΣ}} a = 1 - 0.9987 = 0.0013$

$b = P(\text{σφάλμα τύπου II}) \Rightarrow b = P(\text{αποδ. } H_0 \mid H_a \text{ αληθής}) \Rightarrow$

$b = P(\bar{x} < 21 \mid \mu = 21.5) \Rightarrow b = P(\bar{x} < 21 \mid \mu = 21.5) \Rightarrow$

$b = P(\bar{x} < 21 \mid \bar{x} \sim N(21.5, 1/9)) \Rightarrow$

$$b = P\left(\frac{\bar{x} - 21.5}{\sqrt{1/9}} < \frac{21 - 21.5}{\sqrt{1/9}} \;\middle|\; \frac{\bar{x} - 21.5}{\sqrt{1/9}} \sim N(0,1) \right)$$

$\Rightarrow b = P(Z < -1.5 \mid Z \sim N(0,1)) \Rightarrow b = P(Z > 1.5) = 0.0668$

$\gamma = \text{ισχύς} = 1 - b = 0.9332$

Άσκηση 4.9:

Από την εκφώνηση έχουμε ότι το ύψος του πληθυσμού σε cm ακολουθεί $N(\mu, \sigma^2)$ όπου $\sigma^2 = 6.35^2$ cm^2. Άρα είμαστε στην περίπτωση Δ.Ε για το μ όταν σ^2 γνωστή. Είναι:

$$\bar{x} \pm z_{a/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Εδώ το $a = 5\% \Rightarrow a/2 = 0.025$

$z_{0.025} = 1.96 \Rightarrow \sigma = 6.35$

Μας ζητάει να προσδιορίσουμε το n έτσι ώστε η μέση τιμή του δείγματος να μην διαφέρει από την αληθινή μέση τιμή του πληθυσμού περισσότερο από 1.27 cm σε απόλυτη τιμή με βαθμό εμπιστοσύνης 95%

Ξέρουμε

$$1-\alpha = P\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

άρα πρέπει

$$Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 1.27 \Rightarrow$$

$$n \geq \frac{Z^2_{0.025}\, 6.35^2}{1.27^2} = 96.04$$

άρα $n = 97$

Άσκηση 4.12:

Έστω p το άγνωστο αληθινό κλάσμα-ποσοστό των ατόμων που σκοτώνεται. Υπό την υπόθεση ότι πρόκειται για διωνυμικό p γνωρίζουμε ότι το $100(1-\alpha)\%$ Δ.Ε. για αυτό (προσεγγιστικό) είναι το $\hat{p} \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

Μας ζητείται το σφάλμα εκτίμησης να είναι το πολύ ± 0.02. Πρέπει επομένως

$$0.02 \geq Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \Rightarrow n \geq \frac{Z^2_{\alpha/2}\,\hat{p}(1-\hat{p})}{0.02^2} = \frac{1.96^2\,\hat{p}(1-\hat{p})}{0.02^2}$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{3.8416}{0.0004}\hat{p}(1-\hat{p}) = 9.604 \; 0.7 \; 0.3 = 2016.84$$

$n = 2017.$

Άσκηση 4.13:

Δ.Ε. για το p $100(1-\alpha)\%$: $\hat{p} \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

Εδώ $\hat{p} = \frac{920}{100}$, $\alpha = 1\%$

$Z_{\alpha/2} = Z_{0.01/2} = 2.58$

$(L, U) = (0.8978662, 0.9421338)$